Planche n° 17. Rationnels, réels : corrigé

Exercice n° 1.

1) Soient m et n deux entiers naturels supérieurs à 2.

$$\sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2/\ \sqrt[n]{m} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \exists (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2/\ a^n = m \times b^n.$$

Tout d'abord, si $b = 1$, $m = a^n$ et m est une puissance n-ième parfaite. Ensuite, $a = 1$ est impossible car $m \times b^n \geqslant 2$.

Supposons alors que a et b sont des entiers supérieurs à 2 (et que $a^n = m \times b^n$). L'exposant de tout facteur premier de a^n ou de b^n est un multiple de n et par unicité de la décomposition en facteurs premiers, il en est de même de tout facteur premier de m. Ceci montre que, si $\sqrt[n]{m}$ est rationnel, m est une puissance n-ième parfaite.

Réciproquement, si m est une puissance n-ième parfaite, $\sqrt[n]{m}$ est un entier et en particulier un rationnel. En résumé :

$$\sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt[n]{m} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow m \text{ est une puissance } n \text{ -ième parfaite.}$$

Par suite, si m n'est pas une puissance n-ième parfaite, $\sqrt[n]{m}$ est irrationnel. Par exemple, $\sqrt{2}$ ou $\sqrt[3]{7}$ sont des irrationnels.

2)

$$\begin{aligned}\log 2 \in \mathbb{Q} &\Rightarrow \exists (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2/\ \log 2 = \frac{a}{b} \Rightarrow \exists (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2/\ 10^{a/b} = 2 \Rightarrow \exists (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2/\ 10^a = 2^b \\ &\Rightarrow \exists (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2/\ 5^a = 2^{b-a}.\end{aligned}$$

On a nécessairement $b - a > 0$ car sinon $5^a > 1$ et $2^{b-a} \leqslant 1$ ce qui contredit l'égalité $5^a = 2^{b-a}$.
L'égalité $5^a = 2^{b-a}$ est alors impossible par unicité de la décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On a montré par l'absurde que $\log 2$ est irrationnel.

3) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ e = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t\ dt.$

• Pour $n = 0$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t\ dt = \int_0^1 e^t\ dt = e - 1$ et donc, $e = 1 + \displaystyle\int_0^1 e^t\ dt = \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^0}{0!} e^t\ dt$. La formule à démontrer est donc vraie quand $n = 0$.

• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t\ dt$.

Les deux fonctions $t \mapsto -\dfrac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ et $t \mapsto e^t$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t\ dt = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1) \times n!} e^t\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t\ dt = \frac{1}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t\ dt,$$

et donc,

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t\ dt = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t\ dt.$$

Le résultat est ainsi démontré par récurrence.

Soit n un entier naturel non nul. D'après ce qui précède,

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t\ dt < e \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\ dt = \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Supposons alors par l'absurde que e soit rationnel. Alors, il existe $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2/\ e = \dfrac{a}{b}$.
Soit n un entier naturel non nul quelconque. D'après ce qui précède, on a

$$0 < \frac{a}{b} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!},$$

ce qui s'écrit encore

$$0 < an! - b\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!} < \frac{3b}{n+1}.$$

En particulier, pour $n = 3b$, on a $0 < a(3b)! - b\sum_{k=0}^{3b}\frac{(3b)!}{k!} < \frac{3b}{3b+1} < 1$. Mais ceci est impossible car $an! - b\sum_{k=0}^{3b}\frac{(3b)!}{k!}$ est un entier relatif. Il est donc absurde de supposer que e est rationnel. Finalement, e est irrationnel.

4) Une équation du troisième degré dont les solutions sont $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$ et $\cos\frac{6\pi}{7}$ est

$$\left(X - \cos\frac{2\pi}{7}\right)\left(X - \cos\frac{4\pi}{7}\right)\left(X - \cos\frac{6\pi}{7}\right) = 0,$$

ou encore

$$X^3 - \left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right)X^2 + \left(\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}\right)X - \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} = 0.$$

Calculons alors ces trois coefficients.

Soit $\omega = e^{2i\pi/7}$. Puisque $\omega^7 = 1$ et que $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = -1$, on a :

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = \frac{1}{2}\left(\omega + \omega^6 + \omega^2 + \omega^5 + \omega^3 + \omega^4\right) = -\frac{1}{2},$$

puis,

$$\begin{aligned}
\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} &= \frac{1}{4}\left(\left(\omega + \omega^6\right)\left(\omega^2 + \omega^5\right) + \left(\omega + \omega^6\right)\left(\omega^3 + \omega^4\right) + \left(\omega^2 + \omega^5\right)\left(\omega^3 + \omega^4\right)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\left(\omega^3 + \omega^6 + \omega + \omega^4\right) + \left(\omega^4 + \omega^5 + \omega^2 + \omega^3\right) + \left(\omega^5 + \omega^6 + \omega + \omega^2\right)\right)\\
&= \frac{2}{4}(-1) = -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

et enfin,

$$\begin{aligned}
\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} &= \frac{1}{8}\left(\omega + \omega^6\right)\left(\omega^2 + \omega^5\right)\left(\omega^3 + \omega^4\right)\\
&= \frac{1}{8}\left(\omega^3 + \omega^6 + \omega + \omega^4\right)\left(\omega^3 + \omega^4\right) = \frac{1}{8}\left(\omega^6 + 1 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + 1 + \omega\right)\\
&= \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Les trois nombres $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$ et $\cos\frac{6\pi}{7}$ sont solution de l'équation $X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{8} = 0$ ou encore de l'équation

$$8X^3 + 4X^2 - 4X - 1 = 0.$$

Montrons que cette équation n'admet pas de racine rationnelle. Dans le cas contraire, si, pour p entier relatif non nul et q entier naturel non nul tels que p et q sont premiers entre eux, le nombre $r = \frac{p}{q}$ est racine de cette équation, alors $8p^3 + 4p^2q - 4pq^2 - q^3 = 0$. Ceci peut encore s'écrire $8p^3 = q(-4p^2 + 4pq + q^2)$ ce qui montre que q divise $8p^3$. Comme q est premier avec p et donc avec p^3, on en déduit, d'après le théorème de Gauss que q divise 8. De même, l'égalité $q^3 = p(8p^2 + 4pq - 4q^2)$ montre que p divise 1.

Ainsi, nécessairement $p \in \{-1, 1\}$ et $q \in \{1, 2, 4, 8\}$ ou encore $r \in \left\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right\}$. On vérifie aisément qu'aucun de ces nombres n'est racine de l'équation considérée et donc cette équation n'a pas de racine rationnelle. En particulier, $\cos\frac{2\pi}{7}$ est irrationnel.

5) On sait que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ sont irrationnels mais ceci n'impose rien à la somme $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

Posons $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

$$\begin{aligned}\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \Rightarrow \left(\alpha - \sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)^2 &\Rightarrow \alpha^2 - 2\sqrt{2}\alpha + 2 = 8 + 2\sqrt{15}\\ &\Rightarrow \left(\alpha^2 - 2\sqrt{2}\alpha - 6\right)^2 = 60\\ &\Rightarrow \alpha^4 + 8\alpha^2 + 36 - 4\sqrt{2}\alpha^3 - 12\alpha^2 + 24\sqrt{2}\alpha - 36 = 0\\ &\Rightarrow \alpha^4 - 4\alpha^2 - 24 = 4\sqrt{2}\alpha(\alpha^2 - 6)\end{aligned}$$

Si maintenant, on suppose que α est rationnel, puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel, on a nécessairement $\alpha(\alpha^2 - 6) = 0$ (dans le cas contraire, $\sqrt{2} = \dfrac{\alpha^4 + 8\alpha^2 - 24}{4\alpha(\alpha^2 - 6)} \in \mathbb{Q}$). Mais α n'est ni 0, ni $-\sqrt{6}$, ni $\sqrt{6}$ (car $\alpha^2 > 2+3+5 = 10 > 6$). Donc $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ est irrationnel.

Exercice n° 2.

A et B sont deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ et admettent donc des bornes supérieures notées respectivement α et β.

Pour tout $(a, b) \in A \times B$. On a $a + b \leqslant \alpha + \beta$. Ceci montre que $A + B$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, et donc que $\sup(A + B)$ existe dans $\mathbb{R}$. De plus, puisque $\alpha + \beta$ est un majorant de $A + B$, on a $\sup(A + B) \leqslant \alpha + \beta$.

Soit alors $\varepsilon > 0$.

Il existe $a_0 \in A$ et $b_0 \in B$ tels que $\alpha - \dfrac{\varepsilon}{2} < a_0 \leqslant \alpha$ et $\beta - \dfrac{\varepsilon}{2} < b_0 \leqslant \beta$, et donc tels que $\alpha + \beta - \varepsilon < a_0 + b_0 \leqslant \alpha + \beta$.
En résumé,

1) $\forall (a, b) \in A \times B,\ a + b \leqslant \alpha + \beta$ et
2) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists (a, b) \in A \times B/\ a + b > \alpha + \beta - \varepsilon$.

On en déduit que $\sup(A + B) = \alpha + \beta = \sup A + \sup B$.

La démarche et le résultat sont analogues pour les bornes inférieures.

Exercice n° 3.

Posons pour n entier naturel non nul $u_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n$ de sorte que $A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}^*\} = \left\{0, \dfrac{1}{2} + 1, \dfrac{1}{3} - 1, \dfrac{1}{4} + 1, \dfrac{1}{5} - 1, \dots\right\}$.

Pour $n \geqslant 1$, $u_{2n} = 1 + \dfrac{1}{2n}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 < u_{2n} \leqslant \dfrac{3}{2}$.
Pour $n \geqslant 1$, $u_{2n-1} = -1 + \dfrac{1}{2n-1}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-1 < u_{2n-1} \leqslant 0$.

Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -1 < u_n = \dfrac{3}{2}$. Donc, $\sup A$ et $\inf A$ existent dans $\mathbb{R}$ et de plus $-1 \leqslant \inf A \leqslant \sup A \leqslant \dfrac{3}{2}$.
Ensuite, $\dfrac{3}{2} = u_2 \in A$. Donc, $\sup A = \max A = \dfrac{3}{2}$.

Enfin, pour chaque entier naturel non nul n, on a $-1 \leqslant \inf A \leqslant u_{2n-1} = -1 + \dfrac{1}{2n-1}$. On fait tendre n tend vers l'infini dans cet encadrement, on obtient $\inf A = -1$ (cette borne inférieure n'est pas un minimum).

$$\boxed{\inf A = -1 \text{ et } \sup A = \max A = \frac{3}{2}.}$$

Exercice n° 4.

Posons $B = \left\{|y - x|,\ (x, y) \in A^2\right\}$.

A est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$, et donc $m = \inf A$ et $M = \sup A$ existent dans $\mathbb{R}$.
Pour $(x, y) \in A^2$, on a $m \leqslant x \leqslant M$ et $m \leqslant y \leqslant M$, et donc $y - x \leqslant M - m$ et $x - y \leqslant M - m$ ou encore $|y - x| \leqslant M - m$.

Par suite, B est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. B admet donc une borne supérieure.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $(x_0, y_0) \in A^2$ tel que $x_0 > \sup A - \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $y_0 < \inf A + \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Ces deux éléments x_0 et y_0 vérifient,

$$|y_0 - x_0|| \geqslant x_0 - y_0 > \left(\sup A - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\inf A + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \sup A - \inf A - \varepsilon.$$

En résumé,

1) $\forall (x,y) \in A^2,\ |y-x| \leq \sup A - \inf A$ et
2) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists (x,y) \in A^2 /\ |y-x| > \sup A - \inf A - \varepsilon$.

Donc, $\sup B = \sup A - \inf A$.

Exercice n° 5.

1) $A \cap B$ peut être vide et on n'a rien à dire. Supposons donc $A \cap B$ non vide. Pour $x \in A \cap B$, on a $x \leqslant \sup A$ et $x \leqslant \sup B$ et donc $x \leqslant \min\{\sup A, \sup B\}$.
Dans ce cas, $\sup(A \cap B)$ existe et $\sup(A \cap B) \leqslant \min\{\sup A, \sup B\}$.

On ne peut pas améliorer. Par exemple, soit $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ et $B = ([0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) \cup \{0\}$. On a $\sup A = 1$, $\sup B = 1$, $A \cap B = \{0\}$ et donc $\sup(A \cap B) = 0 < 1 = \min\{\sup A, \sup B\}$.

2) Pour $x \in A \cup B$, on a $x \leqslant \max\{\sup A, \sup B\}$.
Donc $\sup(A \cup B)$ existe dans $\mathbb{R}$ et $\sup(A \cup B) \leqslant \max\{\sup A, \sup B\}$.

Inversement, supposons par exemple $\sup A \geqslant \sup B$ de sorte que $\max\{\sup A, \sup B\} = \sup A$.
Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe $a \in A$ tel que $\sup A - \varepsilon < a \leqslant \sup A$. De plus, a est dans A et donc dans $A \cup B$.

En résumé,

1)$\forall x \in (A \cup B),\ x \leqslant \max\{\sup A, \sup B\}$ et
2) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in (A \cup B) /\ \max\{\sup A, \sup B\} - \varepsilon < x$.

Finalement, $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

3) D'après l'exerccie n° 2, $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

4) Pour $\sup(AB)$, tout est possible. Par exemple, si $A = B =]-\infty, 0]$ alors $\sup A = \sup B = 0$, mais $AB = [0, +\infty[$ et $\sup(AB)$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$.

Exercice n° 6.

Montrons par récurrence que $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

• Pour $n = 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$. L'identité proposée est donc vraie pour $n = 1$.

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2(n+1)-1} \frac{(-1)^k}{k+1} &= \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2(n+1)} = \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2(n+1)} = \sum_{k=n+2}^{2(n+1)} \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ (identité de CATALAN).

Exercice n° 7.

1) Si les b_k sont tous nuls, l'inégalité est claire.
Sinon, pour tout réel x, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + x b_k)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) x + \sum_{k=1}^{n} a_k^2$.

Puisque l'un au moins des b_k n'est pas nul, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k^2 > 0$ et en particulier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \neq 0$.

f est donc un trinôme du second degré, de signe constant sur $\mathbb{R}$. Son discriminant réduit est donc négatif ou nul ce qui fournit :

$$0 \geqslant \Delta' = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right),$$

ou encore $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$, qui est l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ.

2)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \quad (\text{CAUCHY-SCHWARZ}) \\
&= \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right)^2
\end{aligned}$$

et donc, $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$, qui est l'inégalité de MINKOWSKI.

Exercice n° 8.

Pour $x \geqslant 1$, $x + 2\sqrt{x-1} = x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 1 = \left(\sqrt{x-1} + 1\right)^2 \geqslant 0$. De même, $x - 2\sqrt{x-1} = \left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2 \geqslant 0$.
Donc, si on pose $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$, $f(x)$ existe si et seulement $x \geq 1$ et pour $x \geqslant 1$,

$$f(x) = \sqrt{\left(\sqrt{x-1} + 1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x-1} - 11\right)^2} = \sqrt{x-1} + 1 + \left|\sqrt{x-1} - 1\right|.$$

Par suite,

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + |\sqrt{x-1} - 1| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 0 \text{ et } \sqrt{x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 0 \text{ et } \sqrt{x-1} = 1,$$

ce qui est impossible. L'équation proposée n'a pas de solution.

Exercice n° 9.

Soient x un réel et ε un réel strictement positif. On a $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{x+\varepsilon}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe un rationnel r tel que $\sqrt[3]{x} < r < \sqrt[3]{x+\varepsilon}$ et donc tel que $x < r^3 < x + \varepsilon$, par stricte croissance de la fonction $t \mapsto t^3$ sur $\mathbb{R}$.

Donc, $\left\{r^3,\ r \in \mathbb{Q}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

